Lösningsförslag TATA43/9GMA08, 2024-08-21

1a • $(1+4x-2y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(4x-2y) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(4x-2y)^2 + O(\rho^3) \circeq$ (där $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$)

$\circeq 1 + (2x-y) - \frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + y^2) + O(\rho^3)$

• $e^{x+y^2} = 1 + (x+y^2) + \frac{1}{2!}(x+y^2)^2 + O(\rho^3) = \underline{1 + x + (y^2 + \frac{x^2}{2}) + O(\rho^3)}$

• $(1+4x-2y)^{1/2} e^{x+y^2} = 1 + (x+2x-y) + (y^2 + \frac{x^2}{2} - 2x^2 + 2xy - \frac{y^2}{2} + 2x^2 - yx) + O(\rho^3)$

$= 1 + (3x-y) + (\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}) + O(\rho^3)$

• $\ln(1+3x-y) = (3x-y) - \frac{(3x-y)^2}{2} + O(\rho^3)$

vilket ger:

$f(x,y) = 1 + (\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + \frac{9x^2}{2} - 3xy + \frac{y^2}{2}) + O(\rho^3) =$

$= \underline{1 + (5x^2 - 2xy + y^2) + O(\rho^3)}$

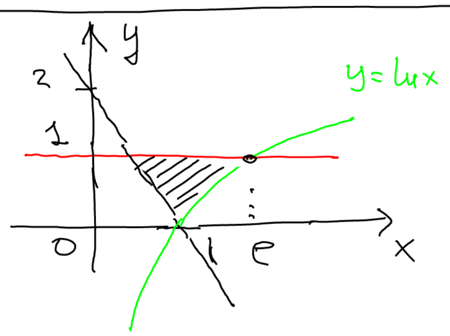
1b Taylorspolynomet ovan medför att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ ($\Leftrightarrow$ linjära termer saknas) $\Rightarrow$ $(0,0)$ är en stationär punkt, and 2:a differentialen är $Q_{(0,0)}(h,k) = 5h^2 - 2hk + k^2 = (k-h)^2 + 4h^2$, alltså positivt definit $\Rightarrow$ $(0,0)$ $\underline{\text{är en minimipunkt}}$

Svar. Se ovan.

---

2 D kan tolkas som:

$$\frac{2-y}{2} \le x \le e^y, \quad 0 \le y \le 1,$$



alltså

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x} = \int_0^1 \left(\int_{\frac{2-y}{2}}^{e^y} \frac{dx}{x} \right) dy = \int_0^1 [\ln x]_{\frac{2-y}{2}}^{e^y} \, dy =$$

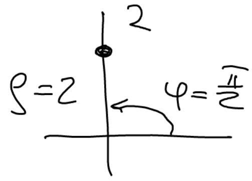
$$= \int_0^1 (y - \ln(2-y) + \ln 2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} - y\ln(2-y) + y\ln 2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{2-y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 2 + \left[y + 2\ln|y-2| \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

Svar: $\frac{3}{2} - \ln 2$

3a Se boken

3b $(0,2) = (x,y) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ och $\rho = 2$. Obs. $\boxed{\begin{array}{l} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \end{array}}$



$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi\right) = (f'_x)'_\varphi\cdot\underbrace{\cos\varphi}_{=0} - f'_x\underbrace{\sin\varphi}_{=1} + (f'_y)'_\varphi\underbrace{\sin\varphi}_{=1} + f'_y\underbrace{\cos\varphi}_{=0} =$$

$$= -f'_x + \left(\frac{\partial f'_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial f'_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) = -\underbrace{f'_x}_{=3} + \underbrace{f''_{xy}}_{=3}(-\underbrace{\rho}_{=2}\underbrace{\sin\varphi}_{=1}) + f''_{xx}(\rho\underbrace{\cos\varphi}_{=0}) =$$

$$= -3 - 6 = -9$$

Svar: $\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\varphi}(2, \frac{\pi}{2}) = -9$

---

(4) Variabelbyte $u = xy$, $v = x^2y^3$ ger

$$z'_x = z'_u\cdot y + z'_v\cdot 2xy^3, \quad z'_y = z'_u x + z'_v\cdot 3x^2y^2,$$

$$z''_{xx} = (z''_{uu}y + z''_{uv}\cdot 2xy^3)\cdot y + (z''_{uv}\cdot y + z''_{vv}\cdot 2xy^3)\cdot 2xy^3 + z'_v\cdot 2y^3$$

$$z''_{xy} = (z'_u + z'_v\cdot 6xy^2) + y(z''_{uu}x + z''_{uv}\cdot 3x^2y^2) + 2xy^3(z''_{uv}x + z''_{vv}\cdot 3x^2y^2)$$

$$z''_{yy} = x(z''_{uu}x + z''_{uv}\cdot 3x^2y^2) + 6x^2y\, z'_v + 3x^2y^2(z''_{uv}x + z''_{vv}\cdot 3x^2y^2),$$

insatt i PDEn ger:

$$3x^2(y^2z''_{uu} + 4y^4x\, z''_{uv} + 4x^2y^6z''_{vv} + z'_v\cdot 2y^3) - 5xy(xyz''_{uu} + 5x^2y^3z''_{uv} + 6x^3y^5z''_{vv} + \cancel{z'_u} + 6xy^2z'_v) + 2y^2(x^2z''_{uu} + 6x^3y^2z''_{uv} + 9x^4y^4z''_{vv} + 6x^2y\,z'_v) + 3x(y\cancel{z'_u} + 2xy^3z'_v) + 2y(x\cancel{z'_u} + 3x^2y^2z'_v) = \dots = -x^3y^4z''_{uv} = 0 \Leftrightarrow$$

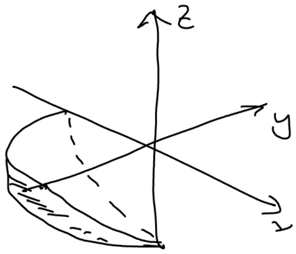
(eftersom $x,y > 0$, så $u,v > 0$) $\Leftrightarrow z''_{uv} = 0 \Leftrightarrow z'_u = g(u) \Leftrightarrow z = G(u) + H(v)$,

$$z = G(xy) + H(x^2y^3)$$

Svar: $z = G(xy) + H(x^2y^3)$, där G, H är godtyckliga C^1-funktioner

---

(5) Rymdpolära koordinater ger $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$



$0 \le r \le 3$, $\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$, alltså

$$\iiint_K x\,dxdydz = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^3 r\cos\varphi\sin\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3\cdot\left[\sin\varphi\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{81}{4}\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{4}$$

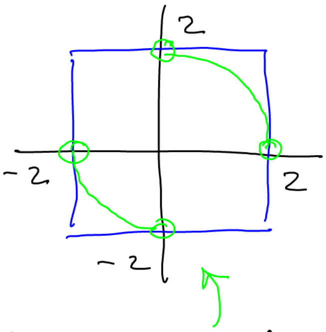
Svar: $I = -\frac{81\pi}{16}$ (Obs. att svaret måste vara negativt!)

---

⑥ $f := x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{4-x^2}$ är kontinuerlig på slutna begränsade definitionsmängden $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2, |y| \le 2\}$, alltså existerar både $a := \min_D f$ och $b := \max_D f$. D är en sluten kvadrat $\Rightarrow$ sammanhängande mängd (d.v.s. två godtyckliga punkter i D kan förbindas med en kurva som ligger i D).

$\Rightarrow$ antar $f(x,y)$ varje värde mellan a och b $\Rightarrow V_f = [a, b]$.

Vi bestämmer a och b med optimering:



- 2D inre punkter: $|x|<2$, $|y|<2$ ger

$$f'_x = \sqrt{4-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$f'_y = \sqrt{4-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{4-y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = \sqrt{(4-x^2)(4-y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 16 - 4x^2 - 4y^2 + x^2y^2 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

två cirkelbåge av radien $=2$ i de 1:a och 3:e kvadranter är stationära punkter.

I dessa punkter: $f(x, \sqrt{4-x^2}) = x^2 + 4 - x^2 = \underline{\underline{4}}$ då $x > 0$

$f(x, -\sqrt{4-x^2}) = -x^2 - 4 + x^2 = \underline{\underline{-4}}$ då $x < 0$

- Randpunkter: $(\pm 2; y)$, $|y| \le 2$ och $(x; \pm 2)$, $|x| \le 2$:

$$\begin{cases} f(\pm 2; y) = \pm 2\sqrt{4-y^2} \\ f(x; \pm 2) = \pm 2\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\max = 2, \ \min = -2}}$$

Sammanfattningsvis: $\max_D f = 4$; $\min_D f = -4$

Svar: $V_f = [-4, 4]$.

---

⑦ Obs. att $u - v = 6y + \sin 4y = g(y)$, där $g'(y) = 6 + 4\cos 4y \ge 6 - 4 \ge 2 > 0$

$\Rightarrow t = g(y)$ är strängt växande, alltså inverterbar. Ytterligare:

$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} \underbrace{y}_{\to\infty}(6 + \underbrace{\frac{\sin 4y}{y}}_{\to 0}) = \infty$, och $\lim_{y\to-\infty} g(y) = -\infty$, alltså är $g(y)$ är inverterbar och inversen $G :]-\infty; \infty[\to]-\infty, \infty[$. Givet godtyckligt par $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ beräknar vi entydigt:

$$y := g^{-1}(u-v) = G(u-v)$$

och sedan

$$x = \frac{u - \sin 4y}{2} = \frac{u - \sin 4G(u-v)}{2},$$

vilket bevisar att avbildningen är <u>globalt (i $\mathbb{R}^2$) inverterbar.</u>

Speciellt: $(x,y) = (1,0) \longrightarrow (u,v) = (2,2)$. Beräknar nu funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4\cos 4y \\ 2 & -6 \end{bmatrix},$$

funktionaldeterminanten $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = -12 - 8\cos 4y \leq -12+8 = -4 < 0 \Rightarrow$

inversa funktionssatsen visar att avbildningen invers är C^1 kring <u>varje $(u,v) \in \mathbb{R}^2$</u>. Vidare, invers funktionalmatris i $(u,v) = (2,2)$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ avläser $x'_v = -\frac{1}{20} \cdot (-4) = \frac{1}{5}$.

<u>Svar.</u> Se ovan, $x'_v(2,2) = \frac{1}{5}$.